Logaritmar med papir og blyant

Sigvart Brendberg

1 Motivasjon

Logaritmar er ein av desse tinga som lett blir ein svart boks. I ein eller anna formel treng du logaritmen av "noko", så du grip etter lommereknaren for å få "svaret".

Å ha ei maskin til å gjera jobben er sjølvsagt uhyre praktisk. Men om du likevel lurar på korleis ein ellers kan gjera det, får du her nokre greie metodar. Dette er ikkje så vanskeleg som ein fyrst skulle tru. Kan hende gjer det også ei betre forståing av logaritmar å ha tenkt over korleis dei virkar.

2 Fyrst litt algebra

Motsatte rekneartar er praktiske når dei dukkar opp. $a + 5 - 5$ forenklar du lett, det same med $\frac{5a}{a}$. Logaritmar, potensar og røter er meir i eit slags stein-saks-papir forhold av motsette rekneartar. Vi nyttar veldig ulik notasjon for dei, så dette er ikkje enkelt å sjå, men kanskje det er noko som er lurt å tenkja litt på? Men denne gongen skal vi berre sjå på eit einskild døme:

$$log_n(n^x) = x$$

Når dette skjer er det veldig praktisk, her forsvinn heile problemet med å rekna ut logaritmen! Her er nokre vanlege døme:

$$\begin{aligned} log(10^x) &= x \\ ln(e^x) &= x \\ log_2(2^x) &= x \end{aligned}$$

Ein anna grunnleggjande eigenskap er at logaritmen av eit produkt er det same som summen av logaritmen av alle ledda. Dette skal vi nytta seinare når vi tek logaritmen av tal.

$$log_n(a \cdot b) = log(a) + log(b)$$

Her er dessutan eit par avleiingar som ofte kjem godt med:

$$
\begin{aligned}
log\left(\frac{a}{b}\right) &= log(a) - log(b) \\
log\left(\frac{1}{a}\right) &= -log(a)
\end{aligned}
$$

Før vi avsluttar denne biten kan det også vera lurt å friska opp at nokre tal har logaritmar som er lett å hugsa:

$$
\begin{aligned}
log(10) = ln(e) = log_2(2) = 1 \\
log(1) = ln(1) = log_2(1) = 0
\end{aligned}
$$

3 Utrekning

3.1 Omtrentleg

I mange tilfelle treng vi berre vita omtrent kva logaritmen er. Då er det nok å tella sifra i talet. Til dømes er $log(1000) = 3$ og $log(10000) = 4$, så då må $log(3000)$ vera mellom 3 og 4 ein eller anna stad.

Vil du finna dei tilsvarande ln og log_2, kan du dobla eller tredobla svaret. Dette gjer ein omtrentleg verdi som ofte er god nok.

3.2 For base 10

Base 10 har ein veldig praktisk eigenskap: å ganga eller dela med 10 er veldig enkelt, det er berre å flytta komma.

Frå algebrabiten veit vi at:

$$
\begin{aligned}
log(250) &= log(25 \cdot 10) \\
&= log(25) + log(10) \\
&= log(25) + 1
\end{aligned}
$$

Det vil seia at vi kan dela talet vi ynskjer å ta logaritmen av med 10, vi må berre hugsa å leggja på 1 til slutt. Tilsvarande kan vi ganga med 10 berre vi trekkjar frå 1 til slutt.

Å ta logaritmen av alle tal kan gjerast om til å ta logaritmen av eit tal mellom 10 og 100! Du må berre ganga eller dela med 10 til du er der.

$$
\begin{aligned}
log(2.5) &= log(25) - 1 \\
log(3476) &= log(34.76) + 2 \\
log(0.0025) &= log(25) - 4
\end{aligned}
$$

3.3 Men korleis tek vi logaritmen av eit tal mellom 10 og 100?

Det kjem vi til no. Fyrst vil eg at du skal læra deg desse fire verdiane:

$$
\begin{aligned}
log(2) &\approx 0.30 \\
log(3) &\approx 0.48 \\
log(5) &\approx 0.70 \\
log(7) &\approx 0.85
\end{aligned}
$$

Pugg. Finn deg hugsereglar. Øv. Desse fire tala må du hugsa. Viss du legg merke til at $0.30 + 0.70 = 1.00$ er ikkje det så rart sida $2 \cdot 5 = 10$

No er nemleg å ta logaritmen det same som faktorisering!

$$
\begin{aligned}
log(15) &= log(3 \cdot 5) \\
&= log(3) + log(5) \\
&= 0.48 + 0.70 \\
&= 1.18
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
log(50) &= log(5 \cdot 10) \\
&= 0.70 + 1 \\
&= 1.70
\end{aligned}
$$

Er eit tal vanskeleg å faktorisera, er det godt nok om eit av nabotala er enklare:

$$
\begin{aligned}
log(33) \approx log(32) &= log(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \\
&= 5 \cdot 0.30 \\
&= 1.50
\end{aligned}
$$

Det same gjeld for desimaltal. Rund av til nærmaste heiltal:

$$
\begin{aligned}
log(34.76) \approx log(35) &= log(5 \cdot 7) \\
&= 0.70 + 0.85 \\
&= 1.55
\end{aligned}
$$

Om du vil, her er nokre andre faktorar som kan vera kjekke å kunna:

$$\begin{aligned} log(1.1) &\approx 0.04 \\ log(1.3) &\approx 0.11 \\ log(\pi) &\approx 0.50 \\ log(e) &\approx 0.4343 \end{aligned}$$

Det siste talet, 0.4343, kan du også få bruk for om du vil ha logaritmen av veldig små faktorar:

$$\begin{aligned} log(1.01) &\approx 0.004343 \\ log(1.001) &\approx 0.0004343 \\ log(1.0001) &\approx 0.00004343 \\ log(1.0003) &\approx 0.00004343 \cdot 3 \end{aligned}$$

3.4 Til base e

For å finna ln, kan du fyrst finna log, og så ganga svaret med 2.3. Som eit ekstra steg kan du leggja på ein tusendel til slutt for litt meir nøyaktigheit.

$$ln(x) \approx 2.3 \cdot log(x)$$

3.5 Til base 2

For å finna log_2, kan du fyrst ganga svaret med 10, og så dela på 3

$$log_2(x) \approx \frac{10}{3} \cdot log(x)$$

3.6 Til kva base som helst

Generelt gjeld dette:

$$log_n(x) = k \cdot log(x)$$

Sida dette gjeld for alle x gjer dette også ein enkel metode for å finna k for ein base n. Vi sett berre $x = n$, og nyttar at $log_n(n) = 1$ i alle basar.

$$\begin{aligned} log_n(n) &= k \cdot log(n) \\ 1 &= k \cdot log(n) \\ k &= \frac{1}{log(n)} \end{aligned}$$

Dette kan du rekna ut på førehand med lommereknaren din, eller som vi nettopp har lært med enkel faktorisering. Meistar du log meistrar du alle logaritmar.